数形结合法在解题中的有效使用

——高中数学解题基本方法系列讲座（11）

■北京市第十二中学 高慧明

数形结合法在每年的高考数学试题中都有所体现，它常用来研究方程根的情况，讨论函数的值域（最值）及求变量的取值范围等.对这类内容的选择题、填空题，数形结合特别有效.从近几年的高考题来看，数形结合的重点是研究“以形助数”.今后的高考中，仍然会沿用以往的命题思路，借助各种函数的图像和方程的曲线为载体，考查数形结合的思想和方法，在考题形式上，不但有小题，还会有解答题，在考查的数量上，会有多个小题考查数形结合的方法.复习中应提高用数形结合的思想和方法解题的意识，画图不能太草，要善于用特殊数或特殊点来精确确定图形间的位置关系.

【数形结合法概述】

1. 数形结合：包含“以形助数”和“以数辅形”两个方面，其应用大致可以分为两种情形：一是借助形的生动性和直观性来阐明数之间的联系，即以形作为手段，数作为目的，比如应用函数的图像来直观地说明函数的性质；二是借助于数的精确性和规范严密性来阐明形的某些属性，即以数作为手段，形作为目的，如应用曲线的方程来精确地阐明曲线的几何性质.

2. 运用数形结合分析解决问题时，要遵循三个原则：

（1）等价性原则.在数形结合时，代数性质和几何性质的转换必须是等价的，否则解题将会出现漏洞.有时，由于图形的局限性，不能完整的表现数的一般性，这时图形的性质只能是一种直观而浅显的说明，要注意其带来的负面效应.

（2）双方性原则.既要进行几何直观分析，又要进行相应的代数抽象探求，仅对代数问题进行几何分析容易出错.

（3）简单性原则.不要为了“数形结合”而数形结合.具体运用时，一要考虑是否可行和是否有利；二要选择好突破口，恰当设参、用参、建立关系、做好转化；三要挖掘隐含条件，准确界定参变量的取值范围，特别是运用函数图像时应设法选择动直线与定二次曲线.

3. 数形结合在高考试题中主要有以下六个常考点：

（1）集合的运算及 Venn 图；

（2）函数及其图像；

（3）数列通项及求和公式的函数特征及函数图像；

（4）方程（多指二元方程）及方程的曲线；

（5）对于研究距离、角或面积的问题，可直接从几何图形入手进行求解即可；

（6）对于研究函数、方程或不等式（最值）的问题，可通过函数的图像求解（函数的零点、顶点是关键点），做好知识的迁移与综合运用.

4. 数形结合的思想和方法是解答高考数学试题的一种常用方法与技巧，特别是在解选择题、填空题时发挥着奇特功效，这就要求我们在平时学习中加强这方面的训练，以提高解题能力和速度.具体操作时，应注意以下几点：

（1）准确画出函数图像，注意函数的定义域；

（2）用图像法讨论方程（特别是含参数的方程）的解的个数是一种行之有效的方法，值得注意的是首先要把方程两边的代数式看作是两个函数的表达式（有时可能先作适当调整，以便于作图），然后作出两个函数的图像，由图求解；

（3）在解答题中数形结合是探究解题的思路时使用的，不可使用形的直观代替相关的计算和推理论证.

一、构建函数模型并结合其图像求参数的取值范围

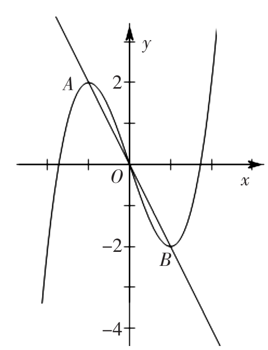
例 1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^3-3x, x\leqslant a\\ -2x. x>a\end{cases}$

①若 $a=0$，则 $f(x)$ 的最大值为 ______________；

②若 $f(x)$ 无最大值，则实数 a 的取值范围是 ________.

【解析】 如图作出函数 $g(x)=x^3-3x$ 与直线 $y=-2x$ 的图像，它们的交点是 $A(-1,2)$，$O(0,0)$，$B(1,-2)$，由 $g'(x)=3x^2-3$，知 $x=1$ 是函数 $g(x)$ 的极大值点.

①当 $a=0$ 时，$\left[f(x)=\begin{cases}x^3-3x, x\leqslant 0\\ -2x. x>0\end{cases}\right]$，因此 $f(x)$ 的最大值是 $f(-1)=2$.



②由图像知当 $a\geqslant -1$ 时，$f(x)$ 有最大值是 $f(-1)=2$；只有当 $a<-1$ 时，由 $a^3-3a<-2a$，因此 $f(x)$ 无最大值，∴ 所求 a 的范围是 $(-\infty,-1)$，故填：2，$(-\infty,-1)$.

例 2. 设函数 $f(x)=e^x(2x-1)-ax+a$，其中 $a<1$，若存在唯一的整数 x_0，使得 $f(x_0)<0$，则 a 的取值范围是（　　）

(A) $[-\frac{3}{2e},1)$　(B) $[-\frac{3}{2e},\frac{3}{4})$　(C) $[\frac{3}{2e},\frac{3}{4})$　(D) $[\frac{3}{2e},1)$

【解析】 设 $g(x)=e^x(2x-1)$，$y=ax-a$，由题知存在唯一的整数 x_0，使得 $g(x_0)$ 在直线 $y=ax-a$ 的下方. 因为 $g'(x)=e^x(2x+1)$，所以当 $x<-\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)<0$，当 $x>-\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)>0$，所以当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，